Il nucleo del calore sui gruppi di Lie nilpotenti

Indice

1 Il gruppo di Heisenberg

Consideriamo $\mathbb{R}^3$ munito del seguente prodotto

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z' + \frac{xy'-x'y}{2}).$$

Tale gruppo è un gruppo di Lie chiamato il gruppo di Heisenberg che indicheremo con $\mathbb{H}$. Costruiamo lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathbb{H}$ (l'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di $\mathbb{H}$), ricordiamo che un campo vettoriale X è invariante a sinistra se $(Xf)_g = Xf_g$, dove $f_g(x) = f(gx)$. Tale spazio è isomorfo allo spazio tangente in $e = (0,0,0)$, elemento neutro di $\mathbb{H}$, mediante l'isomorfismo $X \mapsto X_e \in T_e\mathbb{H}$.

Sia $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$ la base canonica dello spazio tangente in e, siano X, Y e Z i campi invarianti a sinistra tali che $X_e = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y_e = \frac{\partial}{\partial y}$ e $Z_e = \frac{\partial}{\partial z}$. Si ottiene che

$$\begin{aligned} X_{(x,y,z)} &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial z} \\ Y_{(x,y,z)} &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial z} \\ Z_{(x,y,z)} &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

I campi X, Y e Z formano una base per $\mathfrak{h}$. E' facile verificare che $[X,Y] = Z$, dove $[X,Y] = XY - YX$, e che gli altri crochet sono nulli.
Notiamo che $\mathbb{H}$ è un gruppo nilpotente, i.e. la serie discendente

$$\mathfrak{h} \supset [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = \mathbb{R}Z \supset [\mathfrak{h},[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]] = 0$$

è finita.

La struttura di dilatazione. Possiamo decomporre l'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ nella somma diretta

$$\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2,$$

dove V_1 e V_2 sono dei sottospazi vettoriali di $\mathfrak{h}$ tali che $[V_1, V_1] = V_2$.
Si prenda $V_1 =$Vect$\{X, Y\}$, $V_2 =$Vect$\{Z\}$.

E' quindi possibile definire su $\mathbb{H}$ una famiglia di dilatazioni

$$\delta_R(x, y, z) = (Rx, Ry, R^2 z)$$

compatibile con la sua struttura ($[X, Y] = Z$), cioè tale che

$$X(f \circ \delta_R) = (RXf) \circ \delta_R, \qquad Y(f \circ \delta_R) = (RYf) \circ \delta_R, \qquad Z(f \circ \delta_R) = (R^2 Zf) \circ \delta_R.$$

La distanza del controllo. Definiamo su $\mathbb{H}$ una distanza considerando tutti i cammini assolutamente continui che restano tangenti ai campi X e Y quasi ovunque: sia $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$ l'insieme dei cammini assolutamente continui $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{H}$ che verificano

$$\dot{\gamma}(t) = d\gamma(\frac{d}{dt}) = a(t) X_{\gamma(t)} + b(t) Y_{\gamma(t)}$$

per quasi ogni $t \in [0, 1]$. Poniamo

$$|\gamma| = \int_0^1 (a(t)^2 + b(t)^2)^{1/2} dt,$$

e per $g_1, g_2 \in \mathbb{H}$ definiamo

$$d(g_1, g_2) = \inf \{|\gamma| : \gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{X}}, \gamma(0) = g_1, \gamma(1) = g_2\}$$

se esiste almeno uno di questi cammini che congiunge g_1 a g_2, altrimenti poniamo $d(g_1, g_2) = +\infty$.
Valgono i seguenti risultati:

1. I campi X e Y non sono una base per $\mathfrak{h}$, ma sono tali che loro e il loro crochet $[X, Y]$ generano tutta l'algebra $\mathfrak{h}$ (condizione di Hörmander). Questo basta a garantire che (cf. [2]) $d(g_1, g_2) < \infty$ $\forall g_1, g_2 \in \mathbb{H}$.

2. Essendo i campi X e Y invarianti a sinistra la distanza d eredita la proprietà di invarianza a sinistra
$$d(gh_1, gh_2) = d(h_1, h_2), \qquad g, h_1, h_2 \in \mathbb{H}.$$
Nel seguito indicheremo con $|g| = d(g, e)$.

3. Per la proprietà di dilatazione di dilatazione dei campi X e Y si verifica facilmente
$$|\delta_R(g)| = R\,|g|\,, \qquad R > 0, \quad g \in \mathbb{H}.$$

4. La distanza d si può realizzare come (cf. [8])
$$|g| = \sup \{\varphi(g) - \varphi(0) : \varphi \in C^\infty, |\nabla\varphi| \leq 1\}\,,$$
dove $|\nabla\varphi|^2 = (X\varphi)^2 + (Y\varphi)^2$.

Crescita del volume. Consideriamo su $\mathbb{H}$ la misura di Lebesgue $dh = dxdydz$. Osserviamo che dh è invariante a sinistra e a destra, i.e. per ogni $g \in \mathbb{H}$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{H})$

$$\int_{\mathbb{H}} f(gh)dh = \int_{\mathbb{H}} f(h)dh, \qquad \int_{\mathbb{H}} f(hg)dh = \int_{\mathbb{H}} f(h)dh$$

(dh è la misura di Haar di $\mathbb{H}$. Ogni gruppo nilpotente è unimodulare, i.e. la misura di Haar invariante a sinistra e la misura di Haar invariante a destra coincidono).
Poniamo $V(R) = \int_{B(e,R)} dh$, il volume della bolla di centro e e raggio R rispetto alla distanza d. Essendo $B(e,R) = \delta_R(B(e,1))$ si ottiene

$$V(R) = CR^4, \qquad R > 0.$$

Osserviamo che per l'invarianza a sinistra della distanza d e della misura dh si ha che $V(R) = \int_{B(g,R)} dh$ per ogni $g \in \mathbb{H}$.

Il nucleo del calore. Consideriamo l'operatore "somma dei quadrati" dei campi X e Y

$$\Delta = -X^2 - Y^2.$$

Essendo i campi X e Y invarianti a sinistra e quindi anti-simmetrici in $L^2(\mathbb{H}, dh)$, i.e. per ogni $f,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{H})$

$$(Xf, g) = -(f, Xg), \qquad (Yf, g) = -(f, Yg),$$

dove $(.,.)$ è il prodotto interno in $L^2(\mathbb{H}, dh)$, l'operatore Δ definito su $C_0^\infty(\mathbb{H})$ è simmetrico e positivo in $L^2(\mathbb{H}, dh)$, i.e.

(i) $(\Delta f, g) = (f, \Delta g), \quad \forall f,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{H})$ (simmetria)

(ii) $(\Delta f, f) \geq 0, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{H})$ (positività)

In modo canonico gli è associato un operatore auto-aggiunto (che indicheremo ancora con Δ) generatore di un semi-gruppo simmetrico su $L^2(\mathbb{H}, dh)$ che si può dimostrare essere sub-Markoviano (c.f. [5]), i.e.

(i) $f,\ g \in L^2(\mathbb{H}, dh) \quad \Rightarrow \quad (T_t f, g) = (f, T_t g)$ (simmetria)

(ii) $f \in L^2(\mathbb{H}, dh), \quad 0 \leq f \leq 1$ q.o. $\Rightarrow \quad 0 \leq T_t f \leq 1$ q.o. (sub-Markovianità)

(un tale semi-gruppo può essere definito sugli spazi $L^p(\mathbb{H}, dh)$, $1 \leq p \leq \infty$, dove agisce come contrazione.)

Sia ϕ_t il nucleo corrispondente rispetto alla misura di Haar dh. Per l'invarianza a sinistra di Δ il nucleo ϕ_t è un nucleo di convoluzione, i.e.

$$T_t f(g) = \int_{\mathbb{H}} \phi_t(h^{-1}g) f(h) dh, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{H}),$$

di massa totale $\|\phi_t\|_1 = 1$, e per la simmetria di Δ vale la proprietà (di simmetria) del nucleo

$$\phi_t(h) = \phi_t(h^{-1}), \qquad h \in \mathbb{H},\ t > 0.$$

Scopo di queste note è lo studio del comportamento del nucleo del calore ϕ_t e in particolare della sua natura gaussiana.
Ricordiamo che in $\mathbb{R}^D$ il nucleo del calore è della forma $\phi_t(x) = (2\pi t)^{-D/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$.

Strumento fondamentale risulterà essere la disuguaglianza di Harnack che tratteremo nel seguente paragrafo.

1.1 La disuguaglianza di Harnack

Pur non essendo i campi X e Y una base di $\mathfrak{h}$, ma tali che loro e il loro crochet $[X, Y]$ generano tutta l'algebra $\mathfrak{h}$, vale la seguente disuguaglianza di Harnack locale (cf. [1]) per soluzioni positive dell'equazione del calore $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta = 0$:

Teorema 1.1 *Fissati* $0 < a < b < 1$ *e* $0 < \delta < 1$ *esiste una costante* $C > 0$ *tale che per ogni soluzione positiva* v *di*

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)v = 0$$

su $(0,1) \times B(e,1)$ *si ha che*

$$\sup_{x \in B(e,\delta)} v(a,x) \leq C \inf_{x \in B(e,\delta)} v(b,x).$$

Grazie alla struttura di dilatazione di $\mathbb{H}$ e ricordando l'invarianza a sinistra dei campi X e Y e della distanza del controllo d, applicando il teorema 1.1 alla funzione $v(t,x) = u(Rt, x_0 \delta_{\sqrt{R}}(x))$ (l'operatore $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ è omogeneo di grado 1 rispetto alla dilatazione su $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$ cosi definita: $(t,x) \mapsto (Rt, \delta_{\sqrt{R}}(x)))$ si ottiene

Teorema 1.2 *Fissati* $0 < a < b < 1$ *e* $0 < \delta < 1$ *esiste una costante* $C > 0$ *tale che* $\forall x_0 \in \mathbb{H}$, $\forall R > 0$ *e per ogni soluzione positiva* u *di*

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u = 0$$

su $(0,R) \times B(x_0, \sqrt{R})$ *si ha che*

$$\sup_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{R})} u(aR,x) \leq C \inf_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{R})} u(bR,x).$$

1.2 Stima gaussiana superiore

Applicando la disuguaglianza di Harnack (con $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{2}$ e $R = 4t$) a ϕ_t sulla bolla $B(e, \sqrt{t})$, in particolare abbiamo

$$\phi_t(e) \leq C \inf_{y \in B(e,\sqrt{t})} \phi_{2t}(y), \qquad t > 0.$$

Integrando quest' ultima disuguaglianza sulla bolla $B(e, \sqrt{t})$ rispetto alla misura di Haar otteniamo

$$\phi_t(e) V(\sqrt{t}) \leq C \int_{B(e,\sqrt{t})} \phi_{2t}(y) dy \leq C \int_{\mathbb{H}} \phi_{2t}(y) dy \leq C,$$

dove $V(\sqrt{t})$ è volume rispetto alla misura di Haar di $B(e, \sqrt{t})$. Quindi ricordando che $V(\sqrt{t}) = t^2$

$$\phi_t(e) \leq Ct^{-2}, \qquad t > 0. \tag{1.1}$$

Si noti che per la simmetria di ϕ_t si ha che

$$\sup_{x \in \mathbb{H}} \phi_t(x) = \phi_t(e),$$

infatti

$$\phi_t(x) = \int_{\mathbb{H}} \phi_{t/2}(y^{-1}x) \phi_{t/2}(y) dy \leq (\int_{\mathbb{H}} \phi^2_{t/2}(y^{-1}x) dy)^{1/2} (\int_{\mathbb{H}} \phi^2_{t/2}(y) dy)^{1/2}$$

e per l'invarianza a sinistra della misura di Haar e la simmetria di ϕ_t

$$\phi_t(x) \leq \int_{\mathbb{H}} \phi^2_{t/2}(y) dy = \int_{\mathbb{H}} \phi_{t/2}(y^{-1}) \phi_{t/2}(y) dy = \phi_{t/2} * \phi_{t/2}(e) = \phi_t(e).$$

Dunque da (1.1) si ottiene la stima

$$\phi_t(x) \leq Ct^{-2}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{H}. \tag{1.2}$$

Stima gaussiana superiore stretta. Per migliorare la stima (1.2) e ottenere una stima gaussiana superiore stretta per il nucleo ϕ_t, i.e una stima del tipo: $\forall\ 0 < \varepsilon < 1$ esiste una costante $C_\varepsilon > 0$ tale che

$$\phi_t(x) \leq Ct^{-2} \exp(-\frac{|x|^2}{4(1+\varepsilon)t}), \qquad x \in \mathbb{H},\ t > 0, \tag{1.3}$$

utilizziamo un metodo classico di perturbazione del semigruppo T_t dovuto a Davies (cf. [3]). Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{H})$ tale che $|\nabla\varphi| \leq 1$. Consideriamo il semigruppo perturbato

$$e^{-tB} = e^{-\lambda\varphi} T_t(e^{\lambda\varphi} \cdot)$$

il cui generatore è l'operatore $B = e^{-\lambda\varphi}\Delta(e^{\lambda\varphi}\cdot)$.

Allora il semigruppo e^{-tB} soddisfa la stima

$$\left\| e^{-\lambda\varphi} T_t(e^{\lambda\varphi} \cdot) \right\|_{2\to 2} \leq e^{\lambda^2 t}, \qquad t > 0, \tag{1.4}$$

dove con $\|R\|_{2\to 2}$ indichiamo la norma dell'operatore $R : L^2(\mathbb{H}, dh) \to L^2(\mathbb{H}, dh)$.

Per provare (1.4) cominciamo con il calcolare (Bf, f) con $f \in C_0^\infty(\mathbb{H})$:

$$\begin{aligned}
(Bf, f) &= (e^{-\lambda\varphi}\Delta(e^{\lambda\varphi} f), f) \\
&= (X(e^{\lambda\varphi} f), X(e^{-\lambda\varphi} f)) + (Y(e^{\lambda\varphi} f), Y(e^{-\lambda\varphi} f)) \\
&= (\lambda(X\varphi)e^{\lambda\varphi} f + e^{\lambda\varphi} Xf, -\lambda(X\varphi)e^{-\lambda\varphi} f + e^{-\lambda\varphi} Xf) \\
&\quad + (\lambda(Y\varphi)e^{\lambda\varphi} f + e^{\lambda\varphi} Yf, -\lambda(Y\varphi)e^{-\lambda\varphi} f + e^{-\lambda\varphi} Yf) \\
&= -\lambda^2 \int_{\mathbb{H}} (|\nabla\varphi|)^2 f^2 dh + \int_{\mathbb{H}} |\nabla f|^2 \, dh,
\end{aligned}$$

usando l' ipotesi $|\nabla\varphi| \leq 1$ risulta

$$(Bf, f) \geq \|\nabla f\|_2^2 - \lambda^2 \|f\|_2^2 .$$

Allora

$$\frac{d}{dt} \left\| e^{-tB} f \right\|_2^2 = -2(Be^{-tB} f, e^{-tB} f) \leq 2\lambda^2 \left\| e^{-tB} f \right\|_2^2 ,$$

quindi

$$\left\| e^{-tB} f \right\|_2 \leq e^{\lambda^2 t} \|f\|_2, \qquad t > 0.$$

La disuguaglianza precedente e la disuguaglianza di Hölder danno

$$(e^{-tB} f_1, f_2) \leq e^{\lambda^2 t} \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 , \qquad f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{H}).$$

Siano $x_0 \in \mathbb{H}$ e $t > 0$, testiamo quest'ultima disuguaglianza sulle funzioni $f_1 = \mathbf{1}_{B(e,\sqrt{t})}$ e $f_2 = \mathbf{1}_{B(x_0,\sqrt{t})}$

$$\begin{aligned}
(e^{-tB} f_1, f_2) &= \int_{B(x_0,\sqrt{t})} (e^{-tB} f_1)(x) dx \\
&= \int_{B(x_0,\sqrt{t})} \int_{B(e,\sqrt{t})} e^{\lambda(\varphi(y)-\varphi(x))} \phi_t(y^{-1}x) dy dx \leq e^{\lambda^2 t} V(\sqrt{t}).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Vediamo di minorare la quantità $(e^{-tB} f_1, f_2)$. Innanzitutto osserviamo che essendo $|\nabla\varphi| \leq 1$ allora $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq d(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{H}$. Dunque per $y \in B(e, \sqrt{t})$ e $x \in B(x_0, \sqrt{t})$ si ha

$$|\lambda(\varphi(y) - \varphi(e)) + \lambda(\varphi(x_0) - \varphi(x))| \leq 2\,|\lambda|\,\sqrt{t}$$

e quindi
$$\lambda(\varphi(y)-\varphi(x)) \geq \lambda(\varphi(e)-\varphi(x_0)) - 2\,|\lambda|\,\sqrt{t}.$$
Allora
$$\begin{aligned}&\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\int_{B(e,\sqrt{t})} e^{\lambda(\varphi(y)-\varphi(x))}\phi_t(y^{-1}x)dydx\\ &\geq e^{\lambda(\varphi(e)-\varphi(x_0))-2|\lambda|\sqrt{t}}\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\int_{B(e,\sqrt{t})}\phi_t(y^{-1}x)dydx\end{aligned}$$
e per invarianza della misura della misura di Haar e la simmetria di ϕ_t
$$\begin{aligned}&\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\int_{B(e,\sqrt{t})} e^{\lambda(\varphi(y)-\varphi(x))}\phi_t(y^{-1}x)dydx\\ &\geq e^{\lambda(\varphi(e)-\varphi(x_0))-2|\lambda|\sqrt{t}}\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\int_{B(x,\sqrt{t})}\phi_t(y^{-1})dydx\\ &\geq e^{\lambda(\varphi(e)-\varphi(x_0))-2|\lambda|\sqrt{t}}\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\int_{B(x,\sqrt{t})}\phi_t(y)dydx.\end{aligned}$$
Applicando la disuguaglianza di Harnack ($a = \frac{1}{4}\frac{1+3\varepsilon/2}{1+2\varepsilon}$, $b = \frac{1}{4}$, $\delta = \frac{1}{2}$ e $R = 4t$) sulla bolla $B(x,\sqrt{t})$
$$\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\int_{B(e,\sqrt{t})} e^{\lambda(\varphi(y)-\varphi(x))}\phi_t(y^{-1}x)dydx \geq C_\varepsilon^{-1}V(\sqrt{t})\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\phi_{\frac{1+3\varepsilon/2}{1+2\varepsilon}t}(x)dx$$
e applicando una seconda volta Harnack sulla bolla $B(x_0,\sqrt{t})$
$$\int_{B(x_0,\sqrt{t})}\int_{B(e,\sqrt{t})} e^{\lambda(\varphi(y)-\varphi(x))}\phi_t(y^{-1}x)dydx \geq C_\varepsilon^{-1}V(\sqrt{t})^2\phi_{\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}t}(x_0).$$
Dunque insieme alla stima (1.5) abbiamo
$$\phi_{\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}t}(x_0) \leq C_\varepsilon V(\sqrt{t})^{-1}\exp(\lambda^2 t + \lambda(\varphi(x_0)-\varphi(e)) + 2\,|\lambda|\,\sqrt{t}), \qquad x_0\in\mathbb{H},\, t>0.$$
Preso $\lambda = -\frac{\varphi(x_0)-\varphi(e)}{2t}$
$$\begin{aligned}\phi_{\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}t}(x_0) &\leq C_\varepsilon V(\sqrt{t})^{-1}\exp(\frac{(\varphi(x_0)-\varphi(e))^2}{4t} - \frac{2(\varphi(x_0)-\varphi(e))^2}{4t} + \frac{|\varphi(x_0)-\varphi(e)|}{\sqrt{t}})\\ &\leq C_\varepsilon V(\sqrt{t})^{-1}\exp(-\frac{(\varphi(x_0)-\varphi(e))^2}{4t} + \frac{|\varphi(x_0)-\varphi(e)|}{\sqrt{t}}))\\ &\leq C_\varepsilon V(\sqrt{t})^{-1}\exp(-\frac{(\varphi(x_0)-\varphi(e))^2}{4(1+\varepsilon)t}), \qquad |\varphi(x_0)-\varphi(e)| > c_\varepsilon\sqrt{t}.\end{aligned}$$
Cambiando $\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}t$ con t
$$\phi_t(x_0) \leq C_\varepsilon^{-1}V(\sqrt{t})^{-1}\exp(-\frac{(\varphi(x_0)-\varphi(e))^2}{4(1+2\varepsilon)t}), \qquad |\varphi(x_0)-\varphi(e)| > c_\varepsilon\sqrt{t}.$$
Ricordando che
$$|g| = \sup\{\varphi(g)-\varphi(e) : \varphi\in C^\infty,\, |\nabla\varphi|\leq 1\},$$
passando all'estremo superiore rispetto alle $\varphi\in C^\infty$ tali che $|\nabla\varphi|\leq 1$ otteniamo la (1.3).

1.3 Stima gaussiana inferiore

La stima gaussiana inferiore è conseguenza diretta della stima gaussiana superiore e della disuguaglianza di Harnack.

Cominciamo con l'osservare che la massa di ϕ_t è "concentrata nell'origine", i.e. esiste $a > 0$ tale che

$$\int_{B(e,a\sqrt{t})} \phi_t(x)dx \geq \frac{1}{2}, \qquad t > 0.$$

Infatti, grazie alla stima gaussiana superiore e alla struttura di dilatazione, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{\{|x|\geq a\sqrt{t}\}} \phi_t(x)dx &\leq Ct^{-2} \int_{\{|x|\geq a\sqrt{t}\}} \exp(-\frac{|x|^2}{ct})dx \\ &\leq C \int_{\{|x|\geq a\}} \exp(-\frac{|x|^2}{c})dx \leq \frac{1}{2}, \qquad t > 0,\end{aligned}$$

per a grande abbastanza.

Allora, applicando la disuguaglianza di Harnack a ϕ_t sulla bolla $B(a, a\sqrt{t})$, abbiamo

$$\frac{1}{2} \leq \int_{B(e,a\sqrt{t})} \phi_t(y)dy \leq CV(\sqrt{t})\phi_{2t}(x), \qquad |x| < a\sqrt{t},\ t > 0$$

da cui si ha la stima

$$\phi_t(x) \geq C^{-1}t^{-2}, \qquad |x| < a\sqrt{t},\ t > 0. \tag{1.6}$$

La (1.6) implica la stima gaussiana inferiore, grazie alla proprietà di semigruppo: siano $x \in \mathbb{H}$, $t > 0$ fissati e N un intero tale che $N - 1 \leq \frac{64|x|^2}{a^2t} < N$. Possiamo costruire una successione di punti $x_0 = e, x_1, \ldots, x_N = x$ tale che $d(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{2|x|}{N} < \frac{a}{4}\sqrt{\frac{t}{N}}$. Siano $B_i = B(x_i, \frac{2|x|}{N})$, allora se $y_i \in B_i$ e $y_{i+1} \in B_{i+1}$ abbiamo $d(y_i, y_{i+1}) < a\sqrt{\frac{t}{N}}$. Per la proprietà di semigruppo e (1.6)

$$\begin{aligned}\phi_t(x) &= \phi_{t/N} * \cdots * \phi_{t/N}(x) \\ &= \int_{\mathbb{H}} \cdots \int_{\mathbb{H}} \phi_{t/N}(y_{N-1}^{-1}x)\phi_{t/N}(y_{N-2}^{-1}y_{N-1}) \cdots \phi_{t/N}(y_1)dy_{N-1} \cdots dy_1 \\ &\geq \int_{B_{N-1}} \cdots \int_{B_1} \phi_{t/N}(y_{N-1}^{-1}x)\phi_{t/N}(y_{N-2}^{-1}y_{N-1}) \cdots \phi_{t/N}(y_1)dy_{N-1} \cdots dy_1 \\ &\geq (C^{-1}(\frac{t}{N})^{-2})^N \mathrm{Vol}(B_1) \cdots \mathrm{Vol}(B_{N-1})\end{aligned}$$

ma $\frac{2|x|}{N} \geq C\sqrt{\frac{t}{N}}$, e per come è stato scelto N (possiamo sempre supporre $N \geq 2$), abbiamo

$$\begin{aligned}\phi_t(x) &\geq (C^{-1}(\frac{t}{N})^{-2})^N(C\frac{t}{N})^{2(N-1)} \geq C^{-1}C^{-N}(\frac{t}{N})^{-2} \\ &\geq C^{-1}t^{-2}\exp(-cN) \geq C^{-1}t^{-2}\exp(-c\frac{|x|^2}{t}), \qquad x \in \mathbb{H},\ t > 0.\end{aligned}$$

Un altro modo di ottenere la stima gaussiana inferiore da (1.6) è quello di utilizzare il seguente risultato globale per soluzioni positive di $(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u = 0$ su $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{H}$, che si ottiene in modo classico (cf. ad esempio [11, Teorema IV.3.3]) dalla disuguaglianza di Harnack:

$$u(t, y) \leq Cu(2t, x)\exp(\frac{d^2(x, y)}{ct}), \qquad t > 0,\ x, y \in \mathbb{H}.$$

In particolare per ϕ_t abbiamo

$$\phi_t(x) \geq C^{-1}\phi_{t/2}(e)\exp(-\frac{|x|^2}{ct}), \qquad t > 0.$$

2 Il gruppo stratificato

La naturale generalizzazione del gruppo di Heisenberg è il gruppo stratificato, su cui valgono ancora tutte le tecniche utilizzate su $\mathbb{H}$.

Un gruppo di Lie semplicemente connesso G è detto stratificato se la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette la decomposizione

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

dove V_i sono dei sottospazi vettoriali di $\mathfrak{g}$ tali che $[V_1, V_{i-1}] = V_i$, $i = 2, \ldots, r$.
Un gruppo stratificato è un gruppo nilpotente, cioè se indichiamo con $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e con $\mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k]$, $k \geq 1$, esiste r tale che la serie discendente

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_r \supset \mathfrak{g}_{r+1} = (0)$$

è finita. Infatti nel nostro caso $\mathfrak{g}_k = V_{k+1} \oplus \cdots \oplus V_r$, $1 \leq k \leq r-1$ e $\mathfrak{g}_r = (0)$.

E' possibile definire su $\mathfrak{g}$ gli omomorfismi d'algebra

$$\tilde{\delta}_R(X) = R^i X, \qquad R > 0,\ X \in V_i,\ i = 1, \ldots, r.$$

La famiglia di applicazioni $\delta_R = \exp \circ \tilde{\delta}_R \circ \exp^{-1} : G \to G$, dove la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{g} \to G$ è un diffeomorfismo analitico di $\mathfrak{g}$ su G, è una famiglia di automorfismi di G tale che

$$\begin{aligned} \delta_R \circ \delta_S &= \delta_{RS}, \qquad \delta_1 = Id_G \qquad \forall R, S > 0 \\ \delta_R(gg') &= \delta_R(g)\delta_R(g') \qquad \forall R > 0, \qquad \forall g, g' \in G \\ d\delta_R &= \tilde{\delta}_R. \end{aligned}$$

Diremo che δ_R è un gruppo di dilatazioni, adattato alla struttura di G (cf. [4]), i.e.

$$X(f \circ \delta_R) = (\tilde{\delta}_R(X)f) \circ \delta_R = (R^i X f) \circ \delta_R, \qquad X \in V_i$$

Sia $X_1, \ldots, X_m$ una base dello spazio V_1, allora i campi $X_1, \ldots, X_m$ soddisfano la condizione di Hörmander, cioè generano con tutti i loro crochet successivi $[X_{i_1}, [X_{i_2}, [\ldots, X_{i_l}]\ldots]]$ l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Possiamo definire su G la distanza del controllo d, considerando tutti i cammini assolutamente continui che restano tangenti ai campi $X_1, \ldots, X_m$. Valgono ancora tutte le proprietà della distanza d enunciate nel primo paragrafo.

La misura di Haar su G è l'immagine della misura di Lebesgue su $\mathfrak{g}$ tramite la mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Quindi il volume $V(R)$ della bolla di centro e e raggio R soddisfa

$$V(R) = CR^D, \qquad R > 0,$$

dove $D = \sum_{i=1}^m i \dim V_i$.

Consideriamo l'operatore "somma dei quadrati" dei campi $X_1, \ldots, X_m$

$$\Delta = -\sum_{i=1}^m X_i^2,$$

sia $T_t = e^{-t\Delta}$ il semigruppo sub-Markoviano e simmetrico generato da Δ e ϕ_t il nucleo corrispondente rispetto alla misura di Haar di G. Allora ragionando come nel paragrafo precendente, abbiamo che ϕ_t soddisfa le stime gaussiane: esistono una costante $c > 0$ e per ogni $0 < \varepsilon < 1$ una costante $C_\varepsilon > 0$ tali che

$$
\begin{aligned}
(2.1) \qquad C^{-1} t^{-\frac{D}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{ct}) &\leq \phi_t(x) \\
&\leq C t^{-\frac{D}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4(1+\varepsilon)t}), \qquad x \in G,\, t > 0.
\end{aligned}
$$

3 Gruppo di Lie nilpotente qualsiasi

Sia G un gruppo di Lie nilpotente qualsiasi e $X_1, \ldots, X_m$ un sistema di Hörmander fissato. Definiamo su G la distanza del controllo d, considerando tutti i cammini assolutamente continui che restano tangenti ai campi $X_1, \ldots, X_m$.

Indichiamo con $V(R) = m(B(e, R))$ il volume, rispetto alla misura di Haar di G(ricordiamo che ogni gruppo nilpotente è unimodulare, i.e. la misura di Haar invariante a sinistra e la misura di Haar invariante a destra coincidono), della bolla di centro e e raggio R rispetto alla distanza d.
Per l'aspetto locale di $V(R)$ (i.e. per piccoli raggi) abbiamo la seguente stima (cf. [9]): esistono un intero d e una costante $C > 0$ tali che

$$C^{-1} R^d \leq V(R) \leq C R^d, \qquad 0 < R < 1.$$

L'intero d, chiamato dimensione locale, dipende dalla scelta del sistema di Hörmander. Se $X_1, \ldots, X_m$ è una base di $\mathfrak{g}$, i.e. $m = n = \dim \mathfrak{g}$, allora d è uguale alla dimensione topologica n di G. Ad esempio per il gruppo di Heisenberg con il sistema di Hörmander X, Y, Z si ha $d = 3$. In generale la dimensione locale è maggiore della dimensione topologica. Ad esempio per il gruppo di Heisenberg con il sistema di HörmanderX, Y si ha $d = 4$.
Per l'aspetto globale di $V(R)$ (i.e. per grandi raggi), essendo G un gruppo nilpotente, vale la seguente stima (cf. [6]): esistono un intero D e una costante $C > 0$ tali che

$$C^{-1} R^D \leq V(R) \leq C t^D, \qquad R > 1.$$

L'intero D si chiama dimensione all'infinito di G, non dipende dalla scelta del sistema di Hörmander. E' legata alla geometria del gruppo.

Consideriamo l'operatore "somma dei quadrati" dei campi $X_1, \ldots, X_m$

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{m} X_i^2,$$

$T_t = e^{-t\Delta}$ il semigruppo sub-Markoviano e simmetrico generato da Δ e ϕ_t il nucleo corrispondente rispetto alla misura di Haar di G.
Osserviamo che il metodo di perturbazione del semigruppo T_t (metodo di Davies) che abbiamo utilizzato nel paragrafo 1.2 non utilizza la struttura di dilatazione del gruppo. Dunque una volta provata la disuguaglianza di Harnack (cf. Teorema 1.2) per l'operatore Δ su G abbiamo: $\forall\, 0 < \varepsilon < 1$ esiste una costante $C_\varepsilon > 0$ tale che

$$\phi_t(x) \leq C_\varepsilon V(\sqrt{t})^{-1} \exp(-\frac{|x|^2}{4(1+\varepsilon)t}), \qquad x \in G,\, t > 0.$$

Si ricordi che $V(\sqrt{t})^{-1} \sim t^{-d/2}$ per $0 < t < 1$ e che $V(\sqrt{t})^{-1} \sim t^{-D/2}$ per $t > 1$.

Osserviamo inoltre che grazie al fatto che G è un gruppo a crescita polinomiale del volume (dunque $V(R) \leq V(cR) \leq Cc^M V(R),\ R > 0$ $(c > 1)$ per un certo intero M) dalla stima gaussiana superiore abbiamo che la massa di ϕ_t è "concentrata nell'origine":

$$\begin{aligned}
\int_{\{|x| \geq a\sqrt{t}\}} \phi_t(x)dx &\leq CV(\sqrt{t})^{-1} \int_{\{|x| \geq a\sqrt{t}\}} \exp(-\frac{|x|^2}{at})dx \\
&\leq CV(\sqrt{t})^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\{2^i a\sqrt{t} \leq |x| \leq 2^{i+1} a\sqrt{t}\}} \exp(-\frac{|x|^2}{at})dx \\
&\leq CV(\sqrt{t})^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-2^{2i}a) V(2^{i+1} ca\sqrt{t}) \\
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} (2^{i+1}a)^M \exp(-2^{2i}a) \leq C \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-2^{2i-1}a) \leq 1/2,
\end{aligned}$$

per a abbastanza grande.
E dunque, ragionando come nel paragrafo 1.3, grazie alla proprietà di semigruppo otteniamo dalla stima gaussiana superiore la stima inferiore: esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\phi_t(x) \geq C^{-1} V(\sqrt{t})^{-1} \exp(-\frac{|x|^2}{ct}), \qquad x \in G,\ t > 0.$$

3.1 Disuguaglianza di Harnack

In questo paragrafo dimostriamo la disuguaglianza di Harnack (cf. Teorema 1.2) per l'operatore Δ su un gruppo di Lie nilpotente qualsiasi.

3.1.1 Gruppi stratificati e gruppi di Lie nilpotenti

Sia $l(r,m)$ l'algebra libera di rango r e m generatori $E_1, \dots, E_m$ (cf. [7]). Per costruzione è un'algebra stratificata

$$l(r,m) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

con $V_1 = \mathrm{Vect}\{E_1, \dots, E_m\}$ e $V_i = [V_1, V_{i-1}]$, $i = 2, \dots, r$, ed esiste un unico omomorfismo

$$\Pi : l(r,m) \to \mathfrak{g}$$

tale che

$$\Pi(E_i) = X_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Poiché $X_1, \dots, X_m$ soddisfano la condizione di Hörmander, l'omomorfismo Π è suriettivo.
Indichiamo con $N(r,m)$ il gruppo semplicemente connesso la cui algebra di Lie è $l(r,m)$ (cf. [10], teorema 3.15.1). Attraverso l'applicazione esponenziale, Π induce un omomorfismo suriettivo

$$\pi : N(r,m) \to G,$$

$\pi = \exp_G \circ \Pi \circ \exp_N^{-1}$, i.e. $d\pi = \Pi$.

Sia $|\cdot|_N$ la distanze su N indotta dal sistema di Hörmander $E_1, \dots, E_m$. Si verifica facilmente che

$$|x| = \inf_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} |\tilde{x}|_N, \qquad \forall x \in G.$$

Indicando con $B_N(\tilde{x}, R)$ la bolla su N di centro $\tilde{x}$ e di raggio R per la distanza $|\cdot|_N$, si ha quindi che

$$\pi(B_N(\tilde{x}), R) = B(\pi(\tilde{x}), R).$$

3.1.2 Dimostrazione della disuguaglianza di Harnack

Sia $\tilde{\Delta}$ l'operatore su $N(r,m)$ "somma dei quadrati" dei campi $E_1 \dots, E_m$

$$\tilde{\Delta} = -\sum_{i=1}^{m} E_i^2.$$

Per costruzione $\Pi(\tilde{\Delta}) = d\pi(\tilde{\Delta}) = -\sum_{i=1}^{m} X_i^2$.

Poichè $N(r,m)$ è un gruppo stratificato e $E_1 \dots, E_m \in V_1$ vale

Teorema 3.1 *Fissati* $0 < a < b < 1$ *e* $0 < \delta < 1$ *esiste una costante* $C > 0$ *tale che* $\forall \tilde{x}_0 \in N$, $\forall R > 0$ *e per ogni soluzione positiva* v *di*

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\Delta})v = 0$$

su $(0,R) \times B_N(\tilde{x}_0, \sqrt{R})$ *si ha che*

$$\sup_{\tilde{x} \in B_N(\tilde{x}_0, \delta\sqrt{R})} v(aR, \tilde{x}) \leq C \inf_{\tilde{x} \in B_N(\tilde{x}_0, \delta\sqrt{R})} v(bR, \tilde{x}).$$

Applicando il teorema 3.1 alla funzione $v(t,\tilde{x}) = u(t, \pi(x))$ (l'operatore $\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\Delta}$ si proietta nell'operatore $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ e $(0,R) \times B_N(\tilde{x}_0, \sqrt{R})$ in $(0,R) \times B(x_0, \sqrt{R})$) si ottiene

Teorema 3.2 *Fissati* $0 < a < b < 1$ *e* $0 < \delta < 1$ *esiste una costante* $C > 0$ *tale che* $\forall x_0 \in G$, $\forall R > 0$ *e per ogni soluzione positiva* u *di*

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u = 0$$

su $(0,R) \times B(x_0, \sqrt{R})$ *si ha che*

$$\sup_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{R})} u(aR, x) \leq C \inf_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{R})} u(bR, x).$$

Riferimenti bibliografici

[1] J.M. Bony. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. *Ann. Inst. Fourier.*, 52:277–304, 1969.

[2] W. Chow. Über systememen von linearen partiellen differentialgleichungen erster ordung. *Math. Ann*, 117:98–105, 1939.

[3] E. Davies. Explicit constants for Gaussian upper bounds on heat kernels. *Amer. J. Math.*, 109:319–334, 1987.

[4] G. Folland and E. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups.* Princeton University Press, Princeton, 1982.

[5] M. Fukushima. *Dirichlet forms and Markov processes.* North Holland, 1980.

[6] Y. Guivarc'h. Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, 101:333–379, 1973.

[7] N. Jacobson. *Lie algebras.* Wiley, New York, 1962.

[8] D. Jerison and A. Sanchez Calle. *Subelliptic second order differential operators.* Springer Lectures notes in Mathematics, n° 1277.

[9] A. Nagel, E. Stein, and M. Wainger. Balls and metrics defined by vector fields. *Acta Math.*, 155:103–147, 1985.

[10] V. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras and their representations.* Springer Verlag, New York, 1984.

[11] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and Th. Coulhon. *Analysis and geometry on groups.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.